

«ГАИШ МГУ»

КОСМОЛОГИЯ

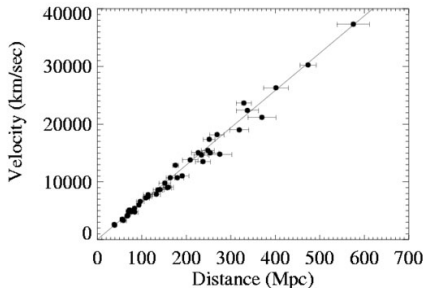
Наталья Архипова
АКЦ ФИАН

Лекция 1: Космологические модели

1. Космологические модели
2. Компоненты Вселенной
3. Полезные формулы

Хаббловский закон

1929, Э. Хаббл.



$$\mathbf{v} = H\mathbf{r}, \quad H = H(t).$$

Скорость удаления галактики определяется по красному смещению $z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}$, интерпретируя его эффектом

Допплера. Для малых z : $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$

Космологические модели

Компоненты Вселенной

Полезные формулы

Однородность и изотропность

В большинстве космологических моделей Вселенная предполагается однородной, изотропной, что однозначно связано с наблюдаемым законом Хаббла:

$$\mathbf{v} = H\mathbf{L}. \quad H = H(t).$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_A = H\mathbf{L} - H\mathbf{L}_A = H(\mathbf{L} - \mathbf{L}_A) = H\mathbf{L}'$$

Таким образом, закон Хаббла с любой точки пространства выглядит одинаково, что говорит об однородности и изотропности Вселенной.

Метрика Фридмана

Космологические модели описываются зависимостью масштабного фактора от времени $a(t)$. Масштабный фактор вводится через величину четырёхмерного интервала:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 dx^2,$$

$a = a(t)$ – масштабный фактор

Метрика для сферически-симметричных решений:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right].$$

k – кривизна пространства, $k = -1, 0, 1$.

$a = 1$ в настоящий момент времени.

Масштабный фактор

Параметр $a(t)$ характеризует "размер" Вселенной для данного момента времени t . Он входит в дифференциал расстояния dL между двумя наблюдателями, безразмерные радиальные координаты которых отличаются на dr :

$$dL = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}},$$

при $k = 0$ $L = a(t)r$.

Относительная скорость двух наблюдателей:

$$v = \frac{dL}{dt} = \dot{a}(t)r = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}L = HL$$

т.е. выражается законом Хаббла, где $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$

Определение красного смещения в космологии.

Движение фотона происходит по геодезической линии, которая определяется уравнением:

$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1-kr^2}$. Если фотон излучается в отдалённой точке r_e в момент времени t_e , то он придёт к наблюдателю, находящемуся в точке $r = 0$, в момент t_0 . Момент t_0 определяется из уравнения геодезической:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Таким образом, момент времени t_0 зависит только от r_e . Пусть наблюдаемый источник излучает монохроматическую волну и один гребень волны излучён в момент t_e , а следующий (через один период) - в момент $t_e + \Delta t_e$; первый гребень придёт в точку $r = 0$ в момент t_0 , а следующий - в момент $t_0 + \Delta t_0$.

Определение красного смещения в космологии.

И, следовательно:

$$\int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

Если за период волны $a(t)$ не успеет заметно измениться, то:

$$\frac{c\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{c\Delta t_0}{a(t_0)} \rightarrow \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$$

и изменение частоты фотона составит:

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$$

В современный момент $a(t_0) = 1$ и следовательно

$$z = \frac{1}{a} - 1 \text{ - космологическое красное смещение,}$$

$$a \equiv \frac{1}{1+z}.$$

Уравнения Фридмана

Уравнения эволюции физических величин получаются из уравнения Эйнштейна: $G_{\mu,\nu} = 8\pi T_{\mu,\nu}$, где $G_{\mu,\nu}$ - метрический тензор, отвечающий за геометрию 4-х мерного пространства, $T_{\mu,\nu}$ - тензор энергии-импульса, определяющий динамику расширения Вселенной.

- ▶ Первое уравнение Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

- ▶ Второе уравнение Фридмана:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{(a\dot{H})}{a} = H^2 + \dot{H} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P)$$

или

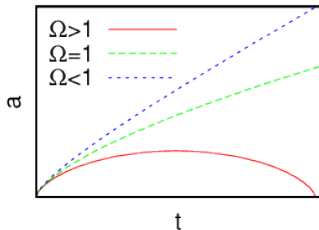
$$-\dot{H} = 4\pi G(\rho + P) - \frac{k}{a^2}$$

Из которых следует уравнение сохранения энергии:

$\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$, где ρ и P - суммарная плотность и давление всех энергетических компонент Вселенной.

Критическая плотность

Критическая плотность Вселенной $\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ определяется при $k = 0$ из первого уравнения Фридмана. Средняя плотность в единицах критической: $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{cr}}$ и из первого уравнения Фридмана: $1 = \Omega - \frac{k}{(aH)^2}$. Отсюда $\Omega < 1$ при $k = -1$, $\Omega = 1$ при $k = 0$, $\Omega > 1$ при $k = 1$ и определяет динамику закон расширения масштабного фактора: плоская, закрытая и открытая модели Фридмана.



Параметр замедления

Космологические
модели

Компоненты
Вселенной

Полезные
формулы

Параметр замедления

$$q \equiv -a\ddot{a}/(\dot{a})^2 = \Omega/2$$

- ▶ для плоской модели Вселенной $q_0 = 1/2$
- ▶ для замкнутой модели Вселенной $q_0 > 1/2$
- ▶ для открытой модели Вселенной $q_0 < 1/2$

Уравнения состояния

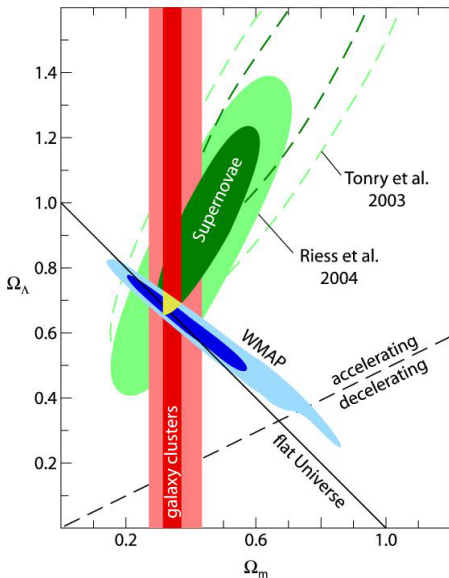
Уравнение состояния также влияет на динамику масштабного фактора.

Из уравнения неразрывности при $k = 0$ для частных случаев:

- ▶ $P = 0$ - материально-доминированная Вселенная
 $\frac{d\rho}{\rho} = -3\frac{da}{a}$, $\rho \sim a^{-3}$, $a(t) \sim t^{2/3}$
- ▶ $P = \frac{\rho}{3}$ - радиационно-доминированная Вселенная
 $\frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a}$, $\rho \sim a^{-4}$, $a(t) \sim t^{1/2}$
- ▶ $P = w\rho$, $w = const$ - баротропное уравнение состояния
 $\frac{d\rho}{\rho} = -3(1-w)\frac{da}{a}$, $\rho \sim a^{-3(1+w)}$,
 $a(t) \sim t^{2/3(1+w)}$
- ▶ $P = -w\rho$, $0 < w < 1$ - вакуумоподобное уравнение состояния
 $\frac{d\rho}{\rho} = -3(1-w)\frac{da}{a}$, $\rho \sim a^{-3(1-w)}$,
 $a(t) \sim e^{Ht}$

Из закона расширения можно определить полную плотность Вселенной Ω и долевой состав компонент с разными уравнениями состояния.

Наблюдательные ограничения параметров.



Из наблюдений:

$\Omega = 1.0$ – полная
(Вселенная плоская).

$\Omega_m \approx 0.3$ –
пылевидная ($P = 0$).

$\Omega_\Lambda \approx 0.7$ – с
отталкиванием!
($P = -\epsilon$).

Космологические
модели

Компоненты
Вселенной

Полезные
формулы

Темная энергия

- ▶ Λ -член в левой части уравнения Эйнштейна - геометрическая конструкция.
- ▶ Энергия вакуума $T_{\mu,\nu}^{vac} = \Lambda g_{\mu,\nu}^{vac}$. Парадокс из теории частиц и наблюдаемой величиной: 120 порядков!
- ▶ Реликт инфляции: нераспавшаяся часть поля инфлатона.
- ▶ Неизвестное эволюционирующее скалярное поле - квинтэссенция.
- ▶ Модифицированные теории гравитации на больших масштабах.

Космологические модели

Компоненты Вселенной

Полезные формулы

Темная материя

$$\Omega_m \approx 0.3, \Omega_b \approx 0.04.$$

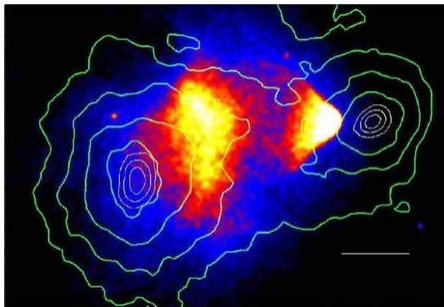
Указания:

- ▶ кривые вращения галактик
- ▶ нехватка газа в скоплениях
- ▶ гравитационное линзирование

Темная материя: холодная и горячая.

Минимальная масса (нейтрино) ~ 1 кэВ.

Максимальная \sim массы Луны.



Скопление «Пуля»

Космологические
модели

Компоненты
Вселенной

Полезные
формулы

Определение расстояний в космологии

1. Метрическое:

$$l_m(t) = a(t)r$$

r - лагранжева координата.

2. Болометрическое - по светимости (L - светимость, F - поток)

$$l_b = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

3. По угловому размеру источников (d - физ.размер, θ - угол)

$$l_a = \frac{d}{\theta}$$

В космологии $l_b \neq l_a!$

Расстояния в космологии

Зависимость l_b и l_a от $a(t)$:

1. Метрическое: $l_m(t) = a(t_0)r$
2. Болометрическое: $l_b = a(t_0)r(1+z)$
3. Угловое: $l_a = a(t_e)r$

где $a(t_0)$ - масштабный фактор на современный момент наблюдения, $a(t_e)$ - масштабный фактор на момент излучения.

Из чего следует: $l_b = l_m(1+z)$, $l_a = l_m/(1+z)$

Для стандартной космологической модели при $k=0$ (без вывода):

$$l_m = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{[\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3]^{1/2}}.$$

«Лестница» расстояний

1. До 10 кпк – параллакс.
2. Цефеиды (звезды с характерной зависимостью $L(T)$) – до 30 Мпк.
3. Мегамазеры (угол) – до 250 Мпк.
4. Различные корреляции свойств галактик (светимость) – до 300 Мпк.
5. Барийонные акустические осцилляции (угол) – до 1000 Мпк ($z \sim 0.3$).
6. Сверхновые Ia (светимость) – до ~ 3000 Мпк ($z \sim 1.0$).
7. Анизотропия РИ (угол) – почти до горизонта ($z \approx 1000$).

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \cdot \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z) [\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3]^{1/2}}.$$

Параметр Хаббла:

$$H(z) = H_0 [\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3]^{1/2}$$

Единицы измерения

$$1 \text{ пк} \approx 3,09 \cdot 10^{18} \text{ см} \approx 3,26 \text{ св. лет},$$
$$1 \text{ Мпк} \approx 3,09 \cdot 10^{24} \text{ см}.$$

Размер галактик $\sim 1\text{-}100$ кпк.

Расстояния между галактиками ~ 1 Мпк.

Горизонт Вселенной $\sim 10^4$ Мпк.

Углы: $^{\circ}, ' = 1/60^{\circ}, '' = 1/60'$

Постоянная Хаббла:

$$H_0 = 73 \pm 3 \text{ км}/(\text{с Мпк})$$

Критическая плотность:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 4.9 \cdot 10^{-30} \text{ г}/\text{см}^3$$

Космологические
модели

Компоненты
Вселенной

Полезные
формулы

Космологические калькуляторы

1. <http://www.astro.ucla.edu/wright/CosmoCalc.html>
Этот калькулятор по заданным значениям H , Ω_m , Ω_Λ на данный момент времени выводит текущий возраст Вселенной, метрическое, болометрическое и угловое расстояние (кpc/arcsec) на заданном красном смещении z .
2. <http://lukash.asc.rssi.ru/soft.html>
Программа для генерации бумажного космологического калькулятора (автор н.с. АКЦ ФИАН Сергей Пилипенко).
Калькулятор позволяет пользуясь только листком бумаги найти связь между следующими параметрами: красным смещением, постоянной Хаббла, расстоянием, падением яркости объектов, возрастом Вселенной и угловым размером объектов. Описание калькулятора приводится в статье <http://arxiv.org/abs/1303.5961>